

Analisi Matematica T_2 – 9CFU (prof.G.Cupini)
A.A.2014-2015 - CdL Ingegneria Automaz./Energ.Elettrica - Univ.Bologna

PROGRAMMA

SERIE

Serie numerica: definizione. Successione delle somme parziali. Carattere di una serie. Condizione necessaria per la convergenza di una serie (con dimostrazione). Una serie a termini non negativi o converge o diverge a $+\infty$ (con dimostrazione).

Serie geometrica di ragione q e studio del suo carattere (con dimostrazione).

Serie armonica: definizione. La serie armonica diverge (con dimostrazione). Serie armonica generalizzata. Criterio del confronto per le serie (con dimostrazione).

Criterio del confronto asintotico. Criterio del rapporto e della radice per le serie numeriche.

Serie a termini di segno non costante. Convergenza assoluta. Legame tra convergenza assoluta e convergenza. Convergenza assoluta implica convergenza e, in generale, non vale il viceversa.

Serie a segno alterno. Criterio di Leibniz.

INTEGRALI GENERALIZZATI

Integrali generalizzati: definizione. L'integrale generalizzato di una funzione non negativa è convergente o divergente a $+\infty$.

Integrale di $(1/x)^a$. Legame tra la convergenza dell'integrale generalizzato di f in $[a, b)$, con b reale e l'esistenza del limite finito di funzione $f(x)$ per x che tende a b . Legame tra la convergenza dell'integrale generalizzato di f in $[a, +\infty)$ e il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a $+\infty$. Esempio di funzione che non ha limite a $+\infty$, ma il cui integrale da 0 a $+\infty$ è convergente.

Criterio del confronto e del confronto asintotico per gli integrali generalizzati. Criterio integrale. Se $|f(x)|$ è integrabile in senso generalizzato, anche $f(x)$ è integrabile in senso generalizzato.

CURVE I

Curve parametriche: definizione. Sostegno. Equazioni parametriche. Significato geometrico e cinematico. Parametrizzazione di rette, segmenti, circonferenze, ellissi, archi di circonferenza, e di ellissi.

Curve di classe C^1 e curve regolari. Vettore e versore tangente al sostegno di una curva. Equazioni parametriche ed equazione cartesiana della retta tangente al sostegno di una curva regolare piana.

TOPOLOGIA DI \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n , norma, distanza, intorno di un punto, punti interni, interno di un insieme. Insiemi aperti e chiusi, limitati e connessi. Punti di frontiera. Frontiera o bordo di un insieme. Punto di accumulazione.

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI REALI: LIMITI E CONTINUITA'

Studio del dominio e del segno di funzioni di due variabili. Insiemi di livello: definizione.

Limiti di funzioni di più variabili reali: definizione.

Calcolo dei limiti per funzioni di due variabili: metodo per dimostrare la non esistenza dei limiti usando le restrizioni. Metodi per dimostrare l'esistenza del limite: sostituzione, uso dei limiti notevoli, metodo dei carabinieri, uso delle coordinate polari.

Continuità di funzione con più variabili reali. Somma, prodotto, quoziente, composizione di

funzioni continue è una funzione continua. Punti di massimo e di minimo assoluti.

Teorema di Weierstrass, teorema di esistenza degli zeri (con dimostrazione), teorema dei valori intermedi (o t. di Bolzano). Corollario ai teoremi di Weierstrass e di Bolzano (con dimostrazione).

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI REALI: CALCOLO DIFFERENZIALE

Derivate parziali. Derivabilità. Gradiente. La derivabilità non implica la continuità. Derivate direzionali. Derivate parziali rispetto a x e a y sono derivate direzionali.

Derivate direzionali. Derivate parziali rispetto a x e a y sono derivate direzionali.

Differenziabilità. Piano tangente. Differenziabilità implica la derivabilità (con dimostrazione). Caratterizzazione della differenziabilità. La differenziabilità implica la continuità (con dimostrazione). L'esistenza delle derivate direzionali non implica la differenziabilità. La differenziabilità implica l'esistenza delle derivate direzionali. Calcolo delle derivate direzionali per funzioni differenziabili.

Definizione di funzione di **classe C^1** . Le funzioni di classe C^1 sono differenziabili.

Il **gradiente** di una funzione di due variabili è diretto nella direzione e verso di massima pendenza (con dimostrazione).

Teorema di derivazione di una funzione composta.

Il **gradiente** di una funzione differenziabile di due variabili è ortogonale alle linee di livello (con dimostrazione).

Calcolo differenziale per funzioni vettoriali con tre o più variabili. Differenziale. Matrice Jacobiana. Teorema di derivazione di funzione composta.

Se la funzione è differenziabile e il gradiente è nullo il piano tangente al grafico è orizzontale.

Punti estremanti relativi. Teorema di Fermat o condizione necessaria del primo ordine per gli estremanti relativi (con dimostrazione). Derivate del secondo ordine e di ordine superiore. Matrice hessiana ed hessiano. Teorema di Schwarz.

Richiami sulle matrici quadrate simmetriche reali: matrici (semi-)definite positive/negative. Caratterizzazione delle matrici definite positive.

Sviluppo di Taylor del secondo ordine per funzione di due variabili con resto in forma di Peano.

Condizione sufficiente del secondo ordine per gli estremanti relativi (con dimostrazione). Punti di sella.

Classificazione dei punti critici usando: la matrice hessiana oppure, se l'hessiano è zero, la definizione di punto estremante relativo. Condizione necessaria del secondo ordine per gli estremanti relativi.

Punti estremanti assoluti. Metodo per la identificazione dei punti di massimo/minimo assoluti per funzioni di due variabili definite su compatti. Determinazione dell'immagine. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

FINE PROGRAMMA I PROVA PARZIALE

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI REALI: CALCOLO INTEGRALE

Domini normali nel piano. Misura di un dominio normale. Partizione di un dominio normale. Somma integrale inferiore e superiore rispetto a una partizione.

Definizione di **integrale doppio** e suo significato geometrico. Proprietà dell'integrale doppio. Formule di riduzione. Applicazione della formula di riduzione per il calcolo degli integrali doppi sui rettangoli con funzione integranda a variabili separate.

Calcolo di integrali sotto opportune ipotesi di simmetria. **Baricentro** di un dominio normale. Primo teorema di Guldino (calcolo dei volumi di solidi di rotazione).

Definizione di dominio normale regolare e di dominio regolare. Teorema del cambiamento di variabili per gli integrali doppi. Teorema del cambiamento di variabili per gli integrali doppi: il caso delle coordinate polari.

Definizione di domini di R^3 normali rispetto a un piano: definizione e misura. Definizione di **integrali tripli**.

Teoremi di riduzione per il calcolo di integrali tripli: integrazione per fili e per strati. Coordinate cilindriche e sferiche e loro generalizzazioni.

Teorema di cambiamento di variabile per gli integrali tripli.

CURVE II

Curve chiuse, curve semplici. Curve regolari e regolari a tratti. Curve equivalenti. Curve equiorientate. Metodo per cambiare l'orientazione alle curve. Curve semplici. Curve il cui sostegno è grafico di funzione di una variabile.

Curve definite mediante equazione polare. Cardioide. Spirale logaritmica. Lunghezza di una curva.

Integrale curvilineo e suo significato geometrico. L'integrale curvilineo è invariante per curve equivalenti (con dimostrazione nel caso di curve equiorientate). Baricentro di una curva. Calcolo dell'area di una superficie di rotazione mediante il (secondo) teorema di Guldino.

Forma differenziale e campi vettoriali: definizioni. Forme differenziali esatte e campi vettoriali conservativi. Primitive di una forma differenziale e potenziali di campi vettoriali.

Le primitive e i potenziali, se esistono, sono infiniti e loro caratterizzazione (con dim.). Forme differenziali chiuse e campi vettoriali irrotazionali (in 2 variabili). Forme differenziali di classe C^1 ed esatte sono chiuse (con dimostrazione)

Definizione di rotore di un campo vettoriali in R^3 . Campi vettoriali irrotazionali e forme differenziali chiuse (in tre variabili). Insiemi semplicemente connessi. Forme differenziali di classe C^1 su insiemi semplicemente connessi sono esatte se e solo se sono chiuse.

Definizione di **integrale curvilineo di una forma differenziale**. Definizione di lavoro di un campo vettoriale. Teorema di integrazione delle forme differenziali esatte (con dimostrazione).

Esempio di forma chiusa, ma non esatta.

Applicazioni alla fisica: legame tra il lavoro di un campo di forze e l'energia cinetica (con dimostrazione) e legge di conservazione dell'energia per un campo di forze conservativo (con dimostrazione). Orientazione positiva della frontiera di un dominio regolare.

Formule di Gauss-Green (con dimostrazione della prima formula nel caso di domini normali rispetto all'asse y). Applicazioni delle formule di Gauss-Green: formula di Stokes nel piano (con dimostrazione) e calcolo delle aree di domini piani usando le formule di Gauss-Green (con dimostrazione), formula per il calcolo delle aree di domini delimitati da una curva espressa definita da una equazione polare.

SUPERFICI

Coni, cilindri, ellissoidi, paraboloidi ellittici e iperbolici, iperboloidi a una e due falde.

Superficie regolare parametrizzata: definizione. Piano tangente a una superficie. Vettore normale. Superfici il cui sostegno è grafico di una funzione di due variabili. Area di una superficie. Superfici di rotazione. Integrale di superficie.

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie. Divergenza di un campo. Teorema della divergenza.

Superficie con bordo. Teorema di Stokes.

(Grazie agli studenti del corso che comunicheranno eventuali omissioni o errori)